

О ЧИСЛЕ ЭЛЕМЕНТОВ СХЕМЫ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ ОБОБЩЕННУЮ ФУНКЦИЮ ГОЛОСОВАНИЯ

Аннотация. Рассматривается один из важнейших разделов математической кибернетики – теория синтеза, надежности и сложности управляющих систем. Актуальность исследований в этой области обусловлена важностью многочисленных приложений, возникающих в различных разделах науки и техники. Все разнообразные средства цифровой техники: ЭВМ, микропроцессорные системы измерений и автоматизации технологических процессов, цифровая связь, телевидение и т.д., строятся на единой элементной базе, в состав которой входят чрезвычайно разные по сложности микросхемы – от логических элементов, выполняющих простейшие операции, до сложнейших программируемых кристаллов, содержащих миллионы логических элементов. Логические элементы цифровых устройств во многом определяют функциональные возможности последних, их конструктивное исполнение, технологичность, надежность. К числу основных модельных объектов математической теории синтеза, сложности и надежности управляющих систем относятся схемы из ненадежных функциональных элементов, реализующие булевы функции. В ряде результатов, относящихся к реализации булевых функций надежными схемами из ненадежных функциональных элементов, фигурирует параметр $N_{\hat{g}}$ – наименьшее число функциональных элементов, необходимых для реализации функции голосования $x^{\cdot}$ в рассматриваемом полном базисе. Оказалось, что еще и другие функции (обозначим их множество через G) обладают свойствами, аналогичными свойствам функции голосования. Эти функции имеют вид $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3\}$) и в статье называются обобщенными функциями голосования, т.е. G – множество функций вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$. Пусть N_g – наименьшее число абсолютно надежных функциональных элементов, необходимых для реализации функции $g \in G$ в рассматриваемом полном базисе, а $N_G = \min_{g \in G} N_g$, т.е. N_G – наименьшее число

абсолютно надежных функциональных элементов, достаточное для реализации хотя бы одной функции из множества G в рассматриваемом полном базисе. Цель данной работы – получить верхнюю оценку величины N_G , которая была бы справедлива в произвольном полном базисе. Предполагается, что все функциональные элементы базиса абсолютно надежны. Для получения верхней оценки величины N_G использованы те же методы и подходы, что и при доказательстве известной теоремы Поста о полноте систем булевых функций. Доказано, что в произвольном полном конечном базисе хотя бы одну функцию множества G можно реализовать схемой, содержащей не более восьми функциональных элементов. Используя это свойство, можно в неравенствах заменить величину N_G константой 8. В ранее известных результатах по надежности схем, состоящих из ненадежных функциональных элементов и содержащих величину N_G – зависящую от рассматриваемого базиса, можно улучшить ряд

ранее известных оценок ненадежности асимптотически оптимальных по надежности схем.

Ключевые слова: функциональные элементы, синтез схем из функциональных элементов.

M. A. Alekhina

ON THE ISSUE OF THE ELEMENTS NUMBER IN THE GATE, REALIZING THE GENERALIZED VOTING FUNCTION

Abstract. The article relates to the one of the most important topics of mathematical cybernetics – to the theory of synthesis, reliability and complexity of control systems. Topicality of research in this field is determined by the significance of multiple applications, appearing in different fields of science and technology. All the variety of digital technologies: computers, microprocessor systems of technological processes measurements and automation, digital communication and television etc., are based on the same elements including extremely different in complexity micro-schemes – from logical elements, executing primitive operations, to complex programmed crystals, containing millions of logical elements. Logical elements of digital devices to a large extent determine the functional features of the latter, construction, technological effectiveness and reliability thereof. The list of general modeling objects of the mathematical theory of synthesis, complexity and reliability of control systems includes gates with unreliable functional elements, realizing Boolean functions. In a number of results, relating to realization of Boolean functions by reliable gates with unreliable elements, there appears the N_g parameter – minimal number of functional elements required for realization of the voting function x in the considered complete basis. It has been revealed that the other functions (let us letter them G) also possess features similar to voting function features. These functions have the following form $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3\}$) and are designated in the article as generalized voting functions, i.e. G is the set of functions of $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ form. Let N_g be the minimal number of absolutely reliable functional elements, required for realization of $g \in G$ function in the considered complete basis, and $N_G = \min_{g \in G} N_g$, i.e. N_G is the minimal number of abso-

lutely reliable functional elements, sufficient for realization of at least one function from G set in the considered complete basis. The article aims at deriving the upper bound of N_G , that would be true in the arbitrary complete basis. It is presupposed that all functional elements of the basis are absolutely reliable. To obtain N_G upper bound the author uses the same methods and approaches, as for proving the well-known Post's theorem about the completion of Boolean functions. It is proved that in the arbitrary complete finite basis at least one function from G set may be realized by the gate, containing at most eight functional elements. Using this feature, it is possible to substitute N_G with 8 constant. In the previously achieved results on reliability of gates, consisting of unreliable functional elements and containing N_G that depends on the considered basis, it is possible to improve the number of previously known reliability estimations of gates asymptotically optimal in reliability.

Key words: functional elements, synthesis of combinatorial gates composed of functional elements.

Пусть P_2 – множество всех булевых функций, G – множество булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 3$), из которых подста-

новой переменных можно получить некоторую функцию вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Булеву функцию вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$) будем называть обобщенной функцией голосования.

Например, $x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \in G$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что $G^* = G$, где G^* – множество булевых функций, каждая из которых двойственна [1] некоторой функции множества G .

Пусть B – произвольный полный конечный базис, $B \subseteq P_2$. Рассматривается реализация обобщенных функций голосования схемами из функциональных элементов в базисе B [2]. Обозначим N_g – минимальное число элементов, необходимых для реализации функции $g \in G$ схемой в базисе B . Пусть $N_G = \min_{g \in G} N_g$, т.е. N_G – наименьшее число элементов, достаточное для реализации хотя бы одной функции из множества G . Ясно, что число N_G зависит от рассматриваемого базиса.

Во многих задачах, относящихся к теории синтеза, сложности и надежности управляющих систем, важно знать величины N_g ($g \in G$) и N_G . Их исследованию посвящена эта статья.

Известно [3], что в произвольном полном конечном базисе тринадцати элементов достаточно для реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ схемой из функциональных элементов. Поэтому $N_G \leq 13$. Однако, если использовать базисные элементы более экономно, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. В любом полном конечном базисе $N_G \leq 8$.

Прежде чем доказать теорему 1, введем необходимые понятия, обозначения, утверждения, а также докажем леммы.

Обозначим (как и в [1]) T_0 – класс функций, сохраняющих константу 0; T_1 – класс функций, сохраняющих константу 1; L – класс линейных функций; M – класс монотонных функций.

Замечание 2. По теореме Поста о функциональной полноте (см. напр., [1, с. 40]) любой полный конечный базис содержит функцию $f_{T_0} \notin T_0$, для которой верно равенство $f_{T_0}(0, \dots, 0) = 1$. Возможны два случая: 1) $f_{T_0}(1, \dots, 1) = 0$ или 2) $f_{T_0}(1, \dots, 1) = 1$. Следовательно, в первом случае $f_{T_0}(x, \dots, x) = \bar{x}$, а во втором – $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1$, т.е. $f_{T_0}(x, \dots, x) \in \{1, \bar{x}\}$.

Замечание 3. По теореме Поста о функциональной полноте (см. напр., [1, с. 40]) любой полный конечный базис содержит функцию $f_{T_1} \notin T_1$, для которой верно равенство $f_{T_1}(1, \dots, 1) = 0$. Рассуждая так же, как в замечании 2, нетрудно проверить, что $f_{T_1}(x, \dots, x) \in \{0, \bar{x}\}$.

Таким образом, справедливо утверждение 1.

Утверждение 1. Любой полный конечный базис содержит такие функции $f_{T_0} \notin T_0$ и $f_{T_1} \notin T_1$, что или $\bar{x} \in \{f_{T_0}(x, \dots, x), f_{T_1}(x, \dots, x)\}$, или $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1, f_{T_1}(x, \dots, x) \equiv 0$.

Из утверждения 1 следует, что в любом полном конечном базисе можно реализовать или $\bar{x}$, используя один функциональный элемент, или константы 0, 1, используя по одному функциональному элементу на каждую.

Лемма 1 [4]. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \notin M$ ($n \geq 3$). Тогда из f подстановкой переменных можно получить такую функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3) \notin M$, что $\varphi(x, 0, 1) = \bar{x}$.

Обозначим $M_0 = \{\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus 1\}$, $M_1 = \{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_3, x_1 \oplus x_3\}$.

Лемма 2 [5]. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) \notin M$ и $\varphi(x, 0, 1) = \bar{x}$.

1) Если $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит только от переменной x_1 , то $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1$;

2) если $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит только от переменных x_1, x_2 , то $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in M_0$;

3) если $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит только от переменных x_1, x_3 , то $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in M_1$;

4) если $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит от всех трех переменных x_1, x_2, x_3 , то $\varphi(x_1, 0, x_3) \in M_1 \cap \{\bar{x}_1\}$.

Замечание 4. Переменная x_i ($i = 2, 3$) для функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ из леммы 2 может быть как существенной, так и фиктивной.

В работе [6] были явно найдены все немонотонные функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, для которых выполняется условие $\varphi(x, 0, 1) = \bar{x}$. Чтобы явно указать такие функции, использовалось их представление в виде полинома Жегалкина с неопределенными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) = & a_1 x_1 x_2 x_3 \oplus a_2 x_1 x_2 \oplus a_3 x_1 x_3 \oplus \\ & \oplus a_4 x_2 x_3 \oplus a_5 x_1 \oplus a_6 x_2 \oplus a_7 x_3 \oplus a_8. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(x, 0, 1) = \bar{x}$, выполняются два равенства $a_3 \oplus a_5 = 1$, $a_7 \oplus a_8 = 1$, из которых получаем четыре возможных условия:

- а) $a_3 = 1, a_5 = 0, a_7 = 1, a_8 = 0$;
- б) $a_3 = 1, a_5 = 0, a_7 = 0, a_8 = 1$;
- в) $a_3 = 0, a_5 = 1, a_7 = 1, a_8 = 0$;
- г) $a_3 = 0, a_5 = 1, a_7 = 0, a_8 = 1$.

Остальные коэффициенты a_1, a_2, a_4, a_6 – произвольные числа из множества $\{0, 1\}$.

В этой работе нам будут нужны лишь те немонотонные функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, для которых $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1$ (случай г). Имеем шестнадцать функций $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, т.е. справедлива лемма 3.

Лемма 3 [6]. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ такова, что $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1$. Тогда $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ – одна из нижеперечисленных функций:

- 1) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus 1$,
- 2) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,
- 3) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 4) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,
- 5) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 6) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,

- 7) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 8) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,
- 9) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 10) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,
- 11) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 12) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,
- 13) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 14) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,
- 15) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 16) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

Лемма 4. Пусть полный базис B содержит функции $x_1 \cdot x_2$, 0, 1 и такую функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, существенно зависящую от трех переменных, что $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1$. Тогда $N_G \leq 7$.

Доказательство. Все функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющие условиям леммы 4, перечислены в формулировке леммы 3 (их 12, исключены функции под номерами 1, 2, 5, 6, которые существенно зависят от одной или двух переменных). Покажем, как построить требуемые схемы в каждом из этих 12 случаев:

1. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1 \sim x_2$. Тогда, моделируя формулу $(x_1 \sim x_2) \cdot (x_2 \sim x_3) \sim x_3$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_3 \oplus x_2 \bar{x}_3 \in G$.

2. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Тогда $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_1 \sim x_2$. Тогда, моделируя формулу $(x_1 \sim x_2) \cdot (x_2 \sim x_3) \sim x_3$, построим схему из пяти элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_3 \oplus x_2 \bar{x}_3$ из множества G .

3. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. отождествим переменные x_1 и x_2 и получим функцию $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1 x_3 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = \overline{x_1 x_3}$. Тогда, моделируя формулу $\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_1 x_3} \cdot \overline{x_2 x_3}$, построим схему из пяти элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$ из множества G .

4. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 \sim x_2$ (случай 1).

5. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2$. Отметим также, что $\varphi(x_1, 0, 0) = \bar{x}_1$. Тогда, моделируя формулу $(\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \times \times (\varphi(x_2, 0, 0), x_3, x_3)$, построим схему из семи элементов, реализующую функцию $(\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3)$ из множества G .

6. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Тогда $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_1 \sim x_2$ (случай 2).

7. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1 \downarrow x_2$ (стрелка Пирса). Тогда, моделируя формулу $(x_1 \cdot x_2) \downarrow [(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3]$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \in G$.

8. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 \sim x_2$ (случай 1).

9. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_2 и получим функцию $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1x_3 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = \overline{x_1}x_3$ (случай 3).

10. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1 \sim x_2$ (случай 1).

11. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_1) = \overline{x_1} \vee x_2$ (случай 5).

12. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 \vee x_2$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1 \downarrow x_2$ (случай 7).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть полный базис B содержит функции $x_1 \vee x_2$, 0, 1 и такую функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, существенно зависящую от трех переменных, что $\varphi(x_1, 0, x_3) = \overline{x_1}$. Тогда $N_G \leq 7$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4. Все функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющие условиям леммы, перечислены в формулировке леммы 3 (их 12, исключены функции под номерами 1, 2, 5, 6, которые существенно зависят от одной или двух переменных). Покажем, как построить требуемые схемы в каждом из этих 12 случаев.

1. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1 \sim x_2$. Тогда, моделируя формулу $(x_1 \vee x_2) \sim ((x_2 \sim x_3) \vee x_3)$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \in G$.

2. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Тогда $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_1 \sim x_2$. Тогда, моделируя формулу $(x_1 \vee x_2) \sim ((x_2 \sim x_3) \vee x_3)$, построим схему из пяти элементов, реализующую функцию $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \in G$.

3. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_2 и получим функцию $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1x_3 \oplus 1 = \overline{x_1}x_3$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1|x_3$. Тогда, моделируя формулу

$$(\overline{x_1x_2}) \left[\left[\left((\overline{x_1x_3}) | (\overline{x_2x_3}) \right) \right] \left[\left((\overline{x_1x_3}) | (\overline{x_2x_3}) \right) \right] \right], \quad (1)$$

построим схему из шести элементов, реализующую функцию $(\overline{x_1x_2}) \left[\left[\left((\overline{x_1x_3}) | (\overline{x_2x_3}) \right) \right] \left[\left((\overline{x_1x_3}) | (\overline{x_2x_3}) \right) \right] \right] = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ из множества G .

4. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 \sim x_2$ (случай 1).

5. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) =$

$= \bar{x}_1 \vee x_2$. Отметим также, что $\varphi(x_1, 0, 0) = \bar{x}_1$, т.е. функцию $\bar{x}_1$ можно реализовать схемой из двух элементов. Тогда, моделируя формулу $\varphi_1(\varphi_1(\varphi_1(x_1, x_2), x_3), \varphi_1(x_2, x_1))$, построим схему из шести элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$ из множества G .

6. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Тогда $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, 0) = x_1 \sim x_2$ (случай 2).

7. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1 \downarrow x_2$. Тогда, моделируя формулу $\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_3}$, построим схему из пяти элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$ из множества G .

8. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 \sim x_2$ (случай 1).

9. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_2 и получим функцию $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1 x_3 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1 | x_3$. Тогда, моделируя формулу $(x_1 \vee x_2) | [(x_1 | x_2) | x_3]$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \in G$.

10. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Отождествим переменные x_2 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_2) = x_1 \sim x_2$ (случай 1).

11. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_1) = \bar{x}_1 \vee x_2$ (случай 5).

12. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Отождествим переменные x_1 и x_3 и получим функцию $\varphi(x_1, x_2, x_1) = \overline{x_1 \vee x_2}$, т.е. $\varphi(x_1, x_1, x_3) = x_1 \downarrow x_2$ (случай 7).

Лемма 5 доказана.

Булевы функции $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_0$ ($a_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) будем называть *особенными* [7].

Лемма 6 [7]. Из всякой нелинейной и неособенной функции от трех или более переменных подстановкой переменных можно получить либо особенную функцию, либо нелинейную функцию от двух переменных.

Из леммы 6 следует, что для всякой нелинейной функции f_L имеет место ровно один из вариантов: либо f_L является особенной функцией, либо f_L – функция двух переменных, либо из неособенной функции $f_L(x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 3$) подстановкой переменных можно получить особенную функцию, либо из неособенной функции $f_L(x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 3$) отождествлением переменных можно получить нелинейную функцию двух переменных. Таким образом, получаем очевидное следствие.

Следствие 1. Из всякой нелинейной функции f_L подстановкой переменных можно получить функцию, равную либо некоторой особенной функции $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_0$, либо некоторой нелинейной функции двух переменных $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_0$ ($a_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).

Доказательство теоремы 1. Пусть B – произвольный полный конечный базис. Поскольку базис B – полный, в нем содержится нелинейная функция f_L . Из функции f_L (см. лемму 6 и следствие 1) подстановкой переменных можно получить функцию, равную либо $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$, либо $\psi(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0$ ($a_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).

1. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$.

1.1. Если функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ конгруэнтна функции $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus a_4(x_2 \oplus x_3) \oplus a_0$, то $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\bar{a}_0 \oplus a_4} x_2^{\bar{a}_0} \oplus x_1^{\bar{a}_0 \oplus a_4} x_3^{\bar{a}_0} \oplus x_2^{\bar{a}_0} x_3^{\bar{a}_0}$, т.е. $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) \in G$. В этом случае $N_G = 1$.

1.2. Если функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ конгруэнтна функции $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3 \oplus a_4(x_1 \oplus x_2) \oplus a_0$, то отождествим переменные x_1, x_2 и получим функцию $\varphi_2(x_1, x_1, x_3) = x_1 \oplus x_3 \oplus a_0$. Моделируя формулу $\varphi_2(\varphi_2(x_1, x_2, x_3), \varphi_2(x_1, x_2, x_3), x_3)$, построим схему S_g из двух элементов. Нетрудно проверить, что $\varphi_2(\varphi_2(x_1, x_2, x_3), \varphi_2(x_1, x_2, x_3), x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus a_4(x_1 \oplus x_2) = g(x_1, x_2, x_3) \in G$. Таким образом, $N_G \leq 2$.

2. Пусть $\psi(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0$, т.е. функция $\psi(x_1, x_2)$ конгруэнтна одной из функций $\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \bar{x}_1 x_2, \bar{x}_1 \vee x_2, x_1 x_2, x_1 \vee x_2$.

2.1. Пусть базис B содержит функцию $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ (заметим, что $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{x_1x_2}$). Тогда (см. формулу (1)) построим схему из шести элементов, реализующую функцию $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ из множества G .

Если базис B содержит функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, двойственную функции $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$, то, заменив в формуле (1) все функции на двойственные, получим формулу для функции $(x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)^* = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Моделируя полученную формулу, построим схему из шести элементов, реализующую функцию $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ из множества G , т.е. утверждение теоремы также верно.

2.2. Пусть базис B содержит функцию $\psi_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2$. По условию базис B – полный, поэтому (утверждение 1) в нем содержатся такие функции $f_{T_0} \notin T_0$ и $f_{T_1} \notin T_1$, что или $\bar{x} \in \{f_{T_0}(x, \dots, x), f_{T_1}(x, \dots, x)\}$, или $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1, f_{T_1}(x, \dots, x) \equiv 0$.

2.2.1. Пусть $\bar{x} \in \{f_{T_0}(x, \dots, x), f_{T_1}(x, \dots, x)\}$. Тогда, моделируя формулу $\psi_1(\psi_1(\psi_1(x_1, x_2), x_3), \overline{\psi_1(x_2, x_1)})$, построим схему из пяти элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3$ из множества G .

Если базис B содержит функцию $\bar{x}_1 \vee x_2$, двойственную функции $\bar{x}_1 x_2$, то утверждение теоремы также верно (поскольку $G^* = G$).

2.2.2. Пусть $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1, f_{T_1}(x, \dots, x) \equiv 0$. Тогда, моделируя формулу $\psi_1(x_1, 1)$, построим схему из двух элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1$. Далее действуем так же, как в случае 2.2.1, и построим схему из шести элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3$ из множества G .

Если базис B содержит функцию $\bar{x}_1 \vee x_2$, двойственную функции $\bar{x}_1 x_2$, то утверждение теоремы также верно (поскольку $G^* = G$).

2.3. Пусть базис B содержит функцию $\psi_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$. По условию базис B – полный, поэтому (утверждение 1) в нем содержатся такие функции $f_{T_0} \notin T_0$ и $f_{T_1} \notin T_1$, что или $\bar{x} \in \{f_{T_0}(x, \dots, x), f_{T_1}(x, \dots, x)\}$, или $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1$, $f_{T_1}(x, \dots, x) \equiv 0$.

2.3.1. Пусть $\bar{x} \in \{f_{T_0}(x, \dots, x), f_{T_1}(x, \dots, x)\}$. Тогда, моделируя формулу $\overline{x_1 x_2 \cdot x_1 x_3 \cdot x_2 x_3}$, построим схему из восьми элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$ из множества G .

2.3.2. Пусть $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1, f_{T_1}(x, \dots, x) \equiv 0$. По условию базис B – полный, поэтому в нем содержится немонотонная функция f_M . По лемме 1 из функции f_M подстановкой переменных получим такую немонотонную функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, что $\varphi(x, 0, 1) = \bar{x}$. По лемме 2 для функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ возможны два случая: функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит не более чем от двух переменных, функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит от трех переменных.

2.3.2.1. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит не более чем от двух переменных. Тогда $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in M_0 \cap M_1 \cap \{\bar{x}_1\} = \{\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus 1, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_3, x_1 \oplus x_3, \bar{x}_1\}$. Случаи, когда $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in \{\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee x_2, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_3, \bar{x}_1\}$, рассмотрены выше. Рассмотрим два оставшихся случая: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ или $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$.

2.3.2.1.1. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sim x_2$. Тогда, моделируя формулу $(x_1 \sim x_2) \cdot (x_2 \sim x_3) \sim x_3$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_3 \oplus x_2 \bar{x}_3$ из множества G .

2.3.2.1.2. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$. Тогда, моделируя формулу $x_1 x_2 \oplus (x_1 \oplus x_2) x_3$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$ из множества G .

2.3.2.2. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит от трех переменных и $\varphi(x_1, 0, x_3) \in M_1 \cap \{\bar{x}_1\} = \{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_3, x_1 \oplus x_3, \bar{x}_1\}$.

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3$, то повторяя рассуждения п. 2.1 и учитывая, что для реализации константы 0 мы используем функциональный элемент, построим схему из семи элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ из множества G .

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = x_1 \oplus x_3$, то, повторяя рассуждения п. 2.3.2.1.2 и учитывая, что для реализации константы 0 мы используем функциональный элемент, построим схему из пяти элементов, реализующую функцию голосования.

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1 x_3$, то, повторяя рассуждения п. 2.2 и учитывая, что для реализации константы 0 мы используем функциональный элемент, построим схему, реализующую функцию $\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$ из множества G и содержащую не более семи элементов.

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1$, то утверждение теоремы верно по лемме 4.

2.4. Пусть базис B содержит функцию $\psi_3(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.

По условию базис B – полный, поэтому (утверждение 1) в нем содержатся такие функции $f_{T_0} \notin T_0$ и $f_{T_1} \notin T_1$, что или $\bar{x} \in \{f_{T_0}(x, \dots, x), f_{T_1}(x, \dots, x)\}$, или $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1, f_{T_1}(x, \dots, x) \equiv 0$.

2.4.1. Пусть $\bar{x} \in \{f_{T_0}(x, \dots, x), f_{T_1}(x, \dots, x)\}$. Тогда, моделируя формулу $x_1 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_3$, построим схему из восьми элементов, реализующую функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$ из множества G .

2.4.2. Пусть $f_{T_0}(x, \dots, x) \equiv 1, f_{T_1}(x, \dots, x) \equiv 0$. По условию базис B – полный, поэтому в нем содержится немонотонная функция f_M . По лемме 1 из функции f_M подстановкой переменных получим такую немонотонную функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, что $\varphi(x, 0, 1) = \bar{x}$. По лемме 2 для функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ возможны два случая: функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит не более чем от двух переменных, функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит от трех переменных.

2.4.2.1. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит не более чем от двух переменных. Тогда $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in M_0 \cap M_1 \cap \{\bar{x}_1\} = \{\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus 1, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_3, x_1 \oplus x_3, \bar{x}_1\}$. Случаи, когда $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in \{\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee x_2, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_3, \bar{x}_1\}$, рассмотрены выше. Рассмотрим два оставшихся случая: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ или $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$.

2.4.2.1.1. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, т.е. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sim x_2$. Тогда, моделируя формулу $(x_1 \vee x_2) \sim ((x_2 \sim x_3) \vee x_3)$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$ из множества G .

2.4.2.1.2. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_3$. Тогда, моделируя формулу $((x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \oplus x_3)) \oplus x_3$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_3 \oplus x_2 \bar{x}_3$ из множества G .

2.4.2.2. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит от трех переменных и $\varphi(x_1, 0, x_3) \in M_1 \cap \{\bar{x}_1\} = \{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_3, x_1 \oplus x_3, \bar{x}_1\}$.

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3$, то повторяя рассуждения п. 2.1 и учитывая, что для реализации константы 0 мы используем функциональный элемент, построим схему из семи элементов, реализующую функцию $x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ из множества G .

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = x_1 \oplus x_3$, то, повторяя рассуждения п. 2.4.2.1.2 и учитывая, что для реализации константы 0 мы используем функциональный элемент, построим схему из пяти элементов, реализующую функцию голосования.

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1 x_3$, то, повторяя рассуждения п. 2.2 и учитывая, что для реализации константы 0 мы используем функциональный элемент, построим схему, реализующую функцию $\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$ из множества G и содержащую не более семи элементов.

Если $\varphi(x_1, 0, x_3) = \bar{x}_1$, то утверждение теоремы верно по лемме 5.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высш. шк., 2001. – 384 с.

2. **Лупанов, О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем / О. Б. Лупанов. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 138 с.
3. **Алехина, М. А.** О числе элементов схемы, реализующей функцию голосования / М. А. Алехина, С. Ю. Епифанов // Молодежная математическая наука – 2012 : сб. материалов Всероссийской с Междунар. участием молодежной научно-практической конф. (Саранск, 27–28 апреля 2012 г.). – Саранск : Изд-во Мордовского гос. пед. института имени М. Е. Евсевьева, 2012. – С. 94–96.
4. **Аксенов, С. И.** О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов / С. И. Аксенов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2005. – № 6 (21). – С. 42–55.
5. **Алехина, М. А.** О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24, № 3. – С. 17–24.
6. **Алехина, М. А.** Об одном свойстве немонотонных булевых функций / М. А. Алехина // Проблемы автоматизации и управления в технических системах – 2011 : тр. Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 19–22 апреля 2011 г.) – Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. – 1 т. – С. 91–93.
7. **Редькин, Н. П.** О полных проверяющих тестах / Н. П. Редькин // Математические вопросы кибернетики : сб. ст. / под ред. С. В. Яблонского. – Вып. 2. – М. : Наука, 1989. – С. 198–222.

References

1. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction into discrete mathematics]. Moscow: Vyssh. shk., 2001, 384 p.
2. Lupanov O. B. *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* [Asymptotic evaluation of control systems complexity]. Moscow: Izd-vo MGU, 1984, 138 p.
3. Alekhina M. A., Epifanov S. Yu. *Molodezhnaya matematicheskaya nauka. 2012: sb. materialov Vserossiyskoy s Mezhdunar. uchastiem molodezhnoy nauchno-prakticheskoy konf.* [Youth mathematical science 2012: proceedings of the All-Russian and International youth scientific-practical conference]. Saransk: Izd-vo Mordovskogo gos. ped. instituta imeni M. E. Evsev'eva, 2012, pp. 94–96.
4. Aksenov S. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Estestvennye nauki* [University proceedings. Volga region. Natural sciences]. 2005, no. 6 (21), pp. 42–55.
5. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2012, vol. 24, no. 3, pp. 17–24.
6. Alekhina M. A. *Problemy avtomatizatsii i upravleniya v tekhnicheskikh sistemakh 2011: tr. Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [Issues in automation and control in technical systems 2011: proceedings of the International scientific and technical conference]. Penza: Izd-vo PGU, 2011, vol. 1, pp. 91–93.
7. Red'kin N. P. *Matematicheskie voprosy kibernetiki: sb. st.* [Mathematical problems in cybernetics: collected papers]. Moscow: Nauka, 1989, vol. 2, pp. 198–222.

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующая кафедрой
дискретной математики, Пензенский
государственный университет
(г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: alehina@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of discrete mathematics, Penza State
University (Penza, 40 Krasnaya str.)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

О числе элементов схемы, реализующей обобщенную функцию голосования / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 5–16.